

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
AN ȘCOLAR 2023 – 2024  
ETAPA LOCALĂ  
10.02.2024

CLASA A V - A

### Subiectul I

Numerele  $\overline{ab}$  și  $\overline{cd}$  se numesc asociate dacă  $a + c = b + d = 9$ .

- Arătați că două numere asociate nu pot fi ambele numere prime.
- Determinați numerele asociate  $\overline{ab}$  și  $\overline{cd}$ , dacă la împărțirea lui  $\overline{ab}$  prin  $\overline{cd}$  se obține câtul 5 și restul 3.

### Subiectul II

Cristina îi spune prietenei sale: „Eu am cu 12 ani mai mult decât aveai tu când eu aveam vârsta pe care o ai, iar când vei avea vârsta pe care o am acum, suma vârstelor noastre va fi 74 de ani.” Câți ani are Cristina? Dar prietena ei?

### Subiectul III

- Scrieți numărul  $91^{91}$  sub forma  $x^2 + y^3$ , unde  $x$  și  $y$  sunt numere naturale, mai mari sau egale cu 2.
- Dacă  $a = 36^n + 1$ , cu  $n$  natural, mai mare sau egal cu 2, arătați că numărul  $a^a$  se poate scrie ca suma a două numere, dintre care unul este pătrat perfect și celălalt cub perfect.

Gazeta Matematică

### Subiectul IV

Determinați numerele naturale de forma  $\overline{abc}$ , știind că  $2024 = 4 \cdot \overline{abc} + \overline{ac} + b$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
AN ȘCOLAR 2023 – 2024  
ETAPA LOCALĂ  
10.02.2024

CLASA a V- a

BAREM

Subiectul I

- a)  $\overline{ab}$  prim implică b cifră impară, adică  $d = 9 - b$  cifră pară 1p  
Deci, asociatul lui este număr par, adică nu poate fi prim 1p  
b)  $\overline{ab} = 5 \overline{cd} + 3$  1p

De unde, scriind în baza 10 și făcând calculele:  $\overline{ab} = 5(99 - \overline{ab}) + 3$  3p

deci  $6 \overline{ab} = 498$ , de unde  $\overline{ab} = 83$ .

Perechea cerută este: 83 și 16. 1p

Subiectul II

	Cristina	Prietena ei	
Trecut	$x + a$	$x$	
Prezent	$x + 12$	$x + a$	2p
$x + 12 - (x + a) = x + a - x$			
$2a = 12 \Leftrightarrow a = 6$ 2p			

	Cristina	Prietena ei	
Trecut	$x + 6$	$x$	
Prezent	$x + 12$	$x + 6$	
Viitor	$x + 12 + t$	$x + 6 + t$	1p
$x + 12 = x + 6 + t. t = 6$			
$x + 12 + 6 + x + 6 + 6 = 74$ . Deci, $x = 22$			
Cristina are 34 de ani, iar prietena ei are 28 de ani. 2p			



### Subiectul III

- a)  $91 = 8^2 + 3^3$  1p  
 $91^{91} = 91 \cdot 91^{90} = (8^2 + 3^3) \cdot 91^{90} = (8 \cdot 91^{45})^2 + (3 \cdot 91^{30})^3$  2p
- b)  $a = (6^n)^2 + 1^3$  1p  
 $a^a = a \cdot a^{a-1} = ((6^n)^2 + 1^3) \cdot a^{36^n} = [(6^n) \cdot a^{36^n:2}]^2 + (a^{36^n:3})^3$  2p
- cu observațiile că  $36^n : 2$  și  $36^n : 3$ , pentru n mai mare sau egal cu 2 1p

### Subiectul IV

- $400a + 40b + 4c + 10a + c + b = 2024$  1p
- $410a + 41b + 5c = 2024$  2p
- Ultima cifră a lui 410a este 0, ultima cifră a lui 5c este 0 sau 5 1p
- Ultima cifră a lui 41b este 4 sau 9 1p
- Pentru  $b = 4$ , nu avem soluție. Pentru  $b = 9$ ,  $1655 = 5 \cdot (82a + c)$  1p
- Deci,  $a = 4, b = 9, c = 3, \overline{abc} = 493$  1p