



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2023 – 2024
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024

CLASA A VI -A

Subiectul I: Arătați că fracția $\frac{\overline{abc} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{cda} \cdot \overline{dab} - \overline{cba} \cdot \overline{dcb} \cdot \overline{adc} \cdot \overline{bad}}{\overline{abcd} \cdot \overline{bcda} \cdot \overline{cdab} \cdot \overline{dabc} - (a+b+c+d)^4}$ este reductibilă.

(Gazeta Matematică seria B, 2023)

Subiectul II: Unghiurile AOB, BOC, COD , și DOA sunt unghiuri în jurul punctului O , OM este bisectoarea unghiului AOB și ON este bisectoarea unghiului COD .

- Dacă $m(\widehat{MON}) = 170^\circ$, $m(\widehat{BOC}) = 140^\circ$, iar punctele A și D sunt interioare unghiului MON , calculează măsura unghiului AOD .
- Dacă $\widehat{BOC} \equiv \widehat{AOD}$, arată că semidreptele OM și ON sunt semidrepte opuse.

Subiectul III: Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ care verifică egalitatea: $\frac{m+2n}{m+2n+25} = \frac{n+2p}{n+2p+39} = \frac{p+2m}{p+2m+29}$. Să se arate că are loc relația: $\frac{2m+n}{2m+n+23} = \frac{2n+p}{2n+p+33} = \frac{2p+m}{2p+m+37}$.

Subiectul IV: Un număr natural n se numește *special* dacă produsul divizorilor săi naturali este egal cu n^3 .

- Arătați că 12 este număr *special*;
- Demonstrați că nu există niciun număr natural n , pătrat perfect, cu $n \geq 2$, care să fie și număr *special*.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2023 – 2024
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024

CLASA A VI -A

BAREM

Subiectul I : Arătați că fracția $\frac{\overline{abc} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{cda} \cdot \overline{dab} - \overline{cba} \cdot \overline{dcb} \cdot \overline{adc} \cdot \overline{bad}}{\overline{abcd} \cdot \overline{bcda} \cdot \overline{cdab} \cdot \overline{dabc} - (a+b+c+d)^4}$ este reductibilă.

(Gazeta Matematică seria B, 2023)

Notăm: $T_1 = \overline{abc} \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{cda} \cdot \overline{dab}$, $T_2 = \overline{cba} \cdot \overline{dcb} \cdot \overline{adc} \cdot \overline{bad}$, $T_3 = \overline{abcd} \cdot \overline{bcda} \cdot \overline{cdab} \cdot \overline{dabc}$1p

$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + (a + b + c) = M_9 + (a + b + c)$. Analog :

$\overline{bcd} = M_9 + (b + c + d)$, $\overline{cda} = M_9 + (c + d + a)$, $\overline{dab} = M_9 + (d + a + b)$.

$T_1 = M_9 + (a + b + c) \cdot (b + c + d) \cdot (c + d + a) \cdot (d + a + b)$2p

Observăm că T_2 va avea aceeași formă, deci $T_1 - T_2 = M_9$1p

$T_3 = M_9 + (a + b + c + d)^4$, ceea ce conduce la faptul că numitorul fracției inițiale este M_92p

În concluzie fracția se poate simplifica prin 9.....1p

Subiectul II: Unghiurile AOB, BOC, COD și DOA sunt unghiuri în jurul punctului O, OM este bisectoarea unghiului AOB și ON este bisectoarea unghiului COD.

a) Dacă $m(\widehat{MON}) = 170^\circ$, $m(\widehat{BOC}) = 140^\circ$, iar punctele A și D sunt interioare unghiului MON, calculează măsura unghiului AOD.

b) Dacă $\widehat{BOC} \equiv \widehat{AOD}$, arată că semidreptele OM și ON sunt semidrepte opuse.

a) $m(\widehat{MOB}) + m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{CON}) = 360^\circ - 170^\circ = 190^\circ$1p

Cum $m(\widehat{BOC}) = 140^\circ \Rightarrow m(\widehat{MOB}) + m(\widehat{CON}) = 50^\circ$1p



[OM bisectoarea $\widehat{AOB} \Leftrightarrow \widehat{MOB} \equiv \widehat{MOA}$, [ON bisectoarea $\widehat{COD} \Leftrightarrow \widehat{CON} \equiv \widehat{NOD}$1p

$\widehat{MOA} + \widehat{NOD} = 50^\circ$ 1p

$\widehat{MON} = \widehat{MOA} + \widehat{AOD} + \widehat{DON} \Leftrightarrow 50^\circ + \widehat{AOD} = 170^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{AOD}) = 120^\circ$ 1p

b) Dacă $\widehat{BOC} \equiv \widehat{AOD}$, semidreptele OB și OD, respectiv OA și OC sunt perechi de semidrepte opuse.....1p

\widehat{AOB} și \widehat{COD} unghiuri opuse la vârf și bisectoarele lor sunt semidrepte opuse.....1p

Subiectul III: Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ pentru care este adevărată egalitatea: $\frac{m+2n}{m+2n+25} = \frac{n+2p}{n+2p+39} = \frac{p+2m}{p+2m+29}$.

Să se arate că are loc relația: $\frac{2m+n}{2m+n+23} = \frac{2n+p}{2n+p+33} = \frac{2p+m}{2p+m+37}$.

Soluție:

$$\frac{m+2n}{m+2n+25} = \frac{n+2p}{n+2p+39} = \frac{p+2m}{p+2m+29} \Rightarrow \frac{m+2n}{25} = \frac{n+2p}{39} = \frac{p+2m}{29} = k \dots\dots\dots 1 p$$

$$\frac{m+2n}{25} = \frac{n+2p}{39} = \frac{p+2m}{29} = k \Rightarrow \begin{cases} m+2n = 25k \\ n+2p = 39k \\ p+2m = 29k \end{cases} \dots\dots\dots 1 p$$

$$\Rightarrow 3(m+n+p) = 93k \Rightarrow m+n+p = 31k \Rightarrow 2m+2n+2p = 62k \dots\dots\dots 1 p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2m+n) + (n+2p) = 2m+2n+2p \Rightarrow 2m+n = 62k - 39k = 23k \\ (2n+p) + (p+2m) = 2m+2n+2p \Rightarrow 2n+p = 62k - 29k = 33k \\ (2p+m) + (m+2n) = 2m+2n+2p \Rightarrow 2p+m = 62k - 25k = 37k \end{cases} \dots\dots\dots 2 p$$

$$\Rightarrow \frac{2m+n}{23} = \frac{2n+p}{33} = \frac{2p+m}{37} = k \dots\dots\dots 1 p$$

$$\Rightarrow \frac{2m+n}{2m+n+23} = \frac{2n+p}{2n+p+33} = \frac{2p+m}{2p+m+37} \dots\dots\dots 1 p$$



Subiectul IV: Un număr natural n se numește *special* dacă produsul divizorilor săi naturali este egal cu n^3 .

- Arătați că 12 este număr *special*;
- Demonstrați că nu există niciun număr natural n , pătrat perfect, cu $n \geq 2$, care să fie și număr *special*.

Soluție:

- Vom nota cu $P(n)$ produsul divizorilor naturali ai numărului n .

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \Rightarrow P(12) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1728 = 12^3 \Rightarrow 12 \text{ este } special \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

- Dacă n este pătrat perfect atunci are un singur divizor natural, d , cu $d = \frac{n}{d}$, pentru orice alt divizor d'

$$\text{avem } \frac{n}{d'} \text{ este tot divizor al lui } n \text{ și } d' \neq \frac{n}{d'} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

\Rightarrow divizorii lui n , diferiți de d , pot fi grupați, doi câte doi, astfel încât produsul divizorilor din fiecare grupă să fie n 2 p

Dacă prin procedeul de mai sus se obțin k grupe, vom avea $P(n) = n^k \cdot d = d^{2k+1}$ 2 p

Dacă n ar fi special, am avea $P(n) = n^3 = (d^2)^3 = d^6$ 1 p

În acest caz, am avea $d^6 = d^{2k+1}$ ceea ce este imposibil, exponenții fiind de parități diferite..... 1p