OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2023 – 2024
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024
CLASA A VII -A

Subiectul I

Fie a un număr real pozitiv. Arătați că:

$\sqrt{a+2}+\sqrt{a+3}+\sqrt{a+4}+\ \ldots\ldots.+\sqrt{a+2024}\leq\frac{2023(a+1014)}{2}$

Subiectul II

a) Se consideră numerele:

X=$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{4}\right)^2}+\ \ldots\ldots\sqrt{\left(\sqrt{2023}-\sqrt{2024}\right)^2}$

Y= $\sqrt{2008+\sqrt{240+\sqrt{252+\sqrt{1+15}}}}-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{(-1)^{2024}}}}}$. Comparați numerele X și Y.

b) Să se arate că numărul A= $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3}+\ \ldots\ldots+\sqrt{5^{200}}}{6\sqrt{5}+30}$ este natural.

Subiectul III

Fie ABC un triunghi dreptunghic, $\sphericalangle(A)=90^0$, $AD\perp BC, D\in(BC)$. Bisectoarea unghiului ACB intersectează dreapta AD în punctul G și latura AB în punctul E. Se notează cu F piciorul perpendicularei din E pe latura BC.

a) Arătați că patrulaterul $AEFG$ este romb.
b) Dacă triunghiul AEG este echilateral, aflați raportul dintre aria patrulaterului $AEFG$ și aria triunghiului ABC.

Subiectul IV

Fie ABCD un trapez isoscel cu AB//CD, AB>CD și AC∩BD={O}. Punctele M,N,P sunt mijloacele segmentelor OC, OB, respective AD, iar MN≡MP.

a) Determinați măsura unghiului AOD;

b) Arătați că măsura unghiului PMN este de 60^0.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii.*

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2023 – 2024
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024
CLASA A VII-A

BAREM

Subiectul I

Din inegalitatea mediilor rezultă $\sqrt{a} \leq \frac{a+1}{2}$……………………………………………………………..……..1p

Atunci $\sqrt{a+2} \leq \frac{a+3}{2}$, $\sqrt{a+3} \leq \frac{a+4}{2}$, … $\sqrt{a+2024} \leq \frac{a+2025}{2}$…………………………………….…..2p

$\sqrt{a+2}+\sqrt{a+3}+\sqrt{a+4} \dots \dots .+\sqrt{a+2024} \leq \frac{a+3}{2}+\frac{a+4}{2} \dots \dots \dots \dots \dots \dots ..+\frac{a+2025}{2}$……………....……1p

$\frac{a+3}{2}+\frac{a+4}{2} \dots \dots \dots \dots \dots \dots ..+\frac{a+2025}{2}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2} \dots .+\frac{a}{2}+\frac{3+4+\cdots \dots 2025}{2}$……………………………….…..………2p

$\sqrt{a+2}+\sqrt{a+3}+\sqrt{a+4} \dots \dots .+\sqrt{a+2024} \leq \frac{2023(a+1014)}{2}$……………………………………………………1p

Subiectul II

a) X=$\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\cdots .+\left|\sqrt{2023}-\sqrt{2024}\right|=$

$\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2024}-\sqrt{2023}=\sqrt{2024}-1$……………………………………..……1p

Y=$\sqrt{2024}-1$, ………………………………………………..……………………………..……...1p

Y=X……………………………………………………………………………………………..………1p

b) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3} \dots \dots +\sqrt{5^{200}}}{6\sqrt{5}+30}=\frac{(\sqrt{5}+5)+5(\sqrt{5}+5)+\cdots+5^{99}(\sqrt{5}+5)}{6(\sqrt{5}+5)}$……………..…………………………2p

$\frac{1++5+5^2+\cdots+5^{99}}{6}=\frac{(1+5)+5^2(1+5)+\cdots+5^{98}(1+5)}{6} \in N$…………………………......……………2p

Subiectul III

a) EC este bisectoarea unghiului C, avem $d(E,AC)=d(E,BC) \Rightarrow (AE)=(EF)$……………………..1p
$\sphericalangle(AEG)=90^0-\sphericalangle(ACE), \sphericalangle(AGE)=\sphericalangle(CGD)=90^0-\sphericalangle(GCD)$, așadar $\sphericalangle(AEG) \equiv \sphericalangle(AGE)$, de unde se obține că ΔAEG este isoscel, deci $(AE)=(AG)$ și $(AG)=(EF)$………………………………….2p
Cum $AG \perp BC$, $EF \perp BC \Rightarrow AG \parallel EF$, deci patrulaterul $AEFG$ este romb…………………………….1p

b) $AEFG$ romb $\Rightarrow CE \perp AF$, deci CE bisectoare și înălțime în ΔAFC, se obține că ΔAFC este isoscel, $\sphericalangle(ACF)=60^0$, așadar ΔAFC este echilateral……………………………………………………………1p
În ΔAFC, înălțimile AD și CE sunt și mediane, deci G este centrul de greutate al triunghiului, de unde

Str. Oituz, nr. 24, Bacău
600266, Bacău
Tel: +40 (0)754033700
Fax: +40 (0)234 571038
office@e-isjbacau.ro
www.isjbacau.ro

rezultă că $AG = \frac{2}{3}AD$. Cum $\sphericalangle(B) = 30^0 \Rightarrow FD = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{4}BC$……………………………………………1p

$A_{AEFG} = AG \cdot FD = \frac{2}{3}AD \cdot \frac{1}{4}BC = \frac{1}{3} \cdot \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{1}{3}A_{ABC}$ ……………………………………………………1p

Subiectul IV

a) MN=linie mijlocie în ΔBOC⇒MN=$\frac{BC}{2}$……………………………………………………………………………………1p

Cum MP≡MN⇒MP=$\frac{BC}{2}$=$\frac{AD}{2}$⇒ MP mediană în ΔDMA⇒$\widehat{DMA} = 90^0$……………………………………………………1p

DM este înălțime și mediană în ΔDOC⇒ΔDOC isoscel⇒ DO≡DC…………………………………………………………1p

Dar trapezul ABCD este isoscel⇒ DO≡OC⇒ΔDOC echilateral⇒$\widehat{AOD} = 120^0$…………………………………………1p

b) $\widehat{PMN} \equiv \widehat{PMA} + \widehat{AMN}$. Cum MN//BC⇒ $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{BDA}$……………………………………………………1p

MP≡ PA⇒$\widehat{PMA} \equiv \widehat{PAM}$. În Δ$AOD$, $\widehat{PAM} + \widehat{ADB} = 60^0$⇒$\widehat{PMN} = 60^0$…………………………………………2p

Str. Oituz, nr. 24, Bacău
600266, Bacău
Tel: +40 (0)754033700
Fax: +40 (0)234 571038
office@e-isjbacau.ro
www.isjbacau.ro