OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2023 – 2024
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024

CLASA A VIII -A

Subiectul I

Determinați numerele întregi x știind că numărul $\sqrt{x^2+2x+4}$ este rațional.

Subiectul II

Se consideră expresia $E(a,b)=a^2+b^2+8a-2b+22$, unde *a* și *b* sunt numere reale.

a) Determinați valoarea minimă a expresiei.

b) Dacă $E(a,b)=6$, arătați că $a^2 \geq b^2+5$.

Subiectul III

Considerăm tetraedrul regulat *ABCD*. Punctele *M, N, P* și *R* aparțin segmentelor *AB, BC, CD,* respectiv *AD,* astfel încât *AM= BN= CP= DR =AB*/3.

a) Demonstrează că unghiul dintre dreptele *MN* și *AC* are măsura de 30^0.

b) Punctul *O* este mijlocul segmentului *MP* . Demonstrează că dreapta *MP* este perpendiculară pe planul (*NOR)* .

Subiectul IV

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=2BC$. Notăm mijlocul segmentului *AB* cu *N* și cu *P*, punctul de intersecție al dreptelor *CN* și *BD*. Se consideră punctul *M* pe muchia BB' astfel încât perimetrul triunghiului AMC' să aibă cea mai mică valoare. Demonstrați că dreapta *MP* este paralelă cu planul $(B'AC)$.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii*

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru: 3 ore.

Str. Oituz, nr. 24, Bacău
600266, Bacău
Tel: +40 (0)754033700
Fax: +40 (0)234 571038
office@e-isjbacau.ro
www.isjbacau.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
AN ȘCOLAR 2023 – 2024
ETAPA LOCALĂ
10.02.2024

CLASA A VIII -A

BAREM

Subiectul I

Determinați numerele întregi x știind că numărul $\sqrt{x^2+2x+4}$ este rațional.

Rezolvare

Notăm y=$\sqrt{x^2+2x+4}$.

$(x+1)^2+3=y^2$, deci $(y+x+1)(y-x-1)=3$ 1p

Cum $x\in\mathbb{Z}$ și $y\in\mathbb{Q}$ rezultă $y\in\mathbb{N}$ 1p

Cum $x\in\mathbb{Z}$ și $y\in\mathbb{N}$ rezultă $(y+x+1),(y-x-1)\in\mathbb{Z}$ și sunt divizori ai lui 3 .... 1p

Din $(y+x+1)=1$ și $(y-x-1)=3$ rezultă y=2 și x= -2 .... 1p

Din $(y+x+1)=3$ și $(y-x-1)=1$ rezultă y=2 și x=0 .... 1p

Din $(y+x+1)=-1$ și $(y-x-1)=-3$ sau $(y+x+1)=-3$ și $(y-x-1)=-1$

rezultă y=-2 , nu convine 1p

Finalizare $x\in\{-2,0\}$ 1p

Subiectul II

Se consideră expresia $E(a,b)=a^2+b^2+8a-2b+22$, unde a și b sunt numere reale.

a) Determinați valoarea minimă a expresiei.

b) Arătați că, dacă $E(a,b)=6$, atunci $a^2\geq b^2+5$.

Rezolvare

a) $E(a,b)=(a+4)^2+(b-1)^2+5\geq 5$, pentru orice numere reale a și b 2p

cum $E(-4,1)=5$, obținem că valoarea minimă a expresiei este egală cu 5....................1p

b) $E(a,b)=6\Rightarrow(a+4)^2+(b-1)^2=1\Rightarrow(a+4)^2\leq 1$ și $(b-1)^2\leq 1$....................1p

$(a+4)^2\leq 1\Leftrightarrow a\in[-5,-3]$, $(b-1)^2\leq 1\Leftrightarrow b\in[0,2]$ 2p

Cum $a^2 \in [9,25]$ și $b^2 \in [0,4]$, rezultă că $a^2 \geq b^2 + 5$…………………….……………………… 1p

Subiectul III

Considerăm tetraedrul regulat *ABCD*. Punctele *M, N, P* și *R* aparțin segmentelor *AB, BC, CD,* respectiv *AD,* astfel încât *AM= BN= CP= DR =AB*/3.

a) Demonstrează că unghiul dintre dreptele *MN* și *AC* are măsura de 30^0 .
b) Punctul *O* este mijlocul segmentului *MP* . Demonstrează că dreapta *MP* este perpendiculară pe planul (*NOR)* .

Rezolvare

a) Notăm cu X mijlocul BC. Din $\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{NX} = 2$ rezultă $MN \parallel AX$ 2p

$\sphericalangle(MN, AC) = \sphericalangle(AX, AC) = 30^0$ 1p

b) $\Delta MBN \equiv \Delta NCP \Rightarrow \Delta MNP$ isoscel $\Rightarrow$ *NO* este mediană, deci înălțime 2p

$\Delta PDR \equiv \Delta RAM \Rightarrow \Delta MPR$ isoscel $\Rightarrow$ *RO* este mediană, deci înălțime 1p

MP⊥*NO* și *MP*⊥*RO* deci *MP*⊥*(NOR)*...1p

Subiectul IV

Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 2BC$. Notăm mijlocul segmentului *AB* cu *N* și cu *P*, punctul de intersecție al dreptelor *CN* și *BD*. Se consideră punctul *M* pe muchia BB' astfel încât perimetrul triunghiului AMC' să aibă cea mai mică valoare. Demonstrați că dreapta *MP* este paralelă cu planul $(B'AC)$.

Rezolvare

Fie $\{O\} = AC \cap BD$.

Punctul *P* este centrul de greutate al triunghiului ABC de unde rezultă că $\frac{PB}{BO} = \frac{2}{3}$. 2p

Pe desfășurarea în plan a paralelipipedului, în dreptunghiul $ACC'A'$, minimul $AM + MC'$ se realizează când punctele *A*, *M* și C' sunt coliniare . ……………………………………………………………..2p

Pe desfășurare avem $MB \parallel CC' \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta ACC' \Rightarrow \frac{BM}{CC'} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BM}{BB'} = \frac{2}{3}$ 1p

În triunghiul $B'BO$ avem $\frac{PB}{BO} = \frac{BM}{BB'} \Rightarrow MP \parallel OB'$ și cum $OB' \subset (B'AC)$ obținem $MP \parallel (B'AC)$ 2p

Str. Oituz, nr. 24, Bacău
600266, Bacău
Tel: +40 (0)754033700
Fax: +40 (0)234 571038
office@e-isjbacau.ro
www.isjbacau.ro